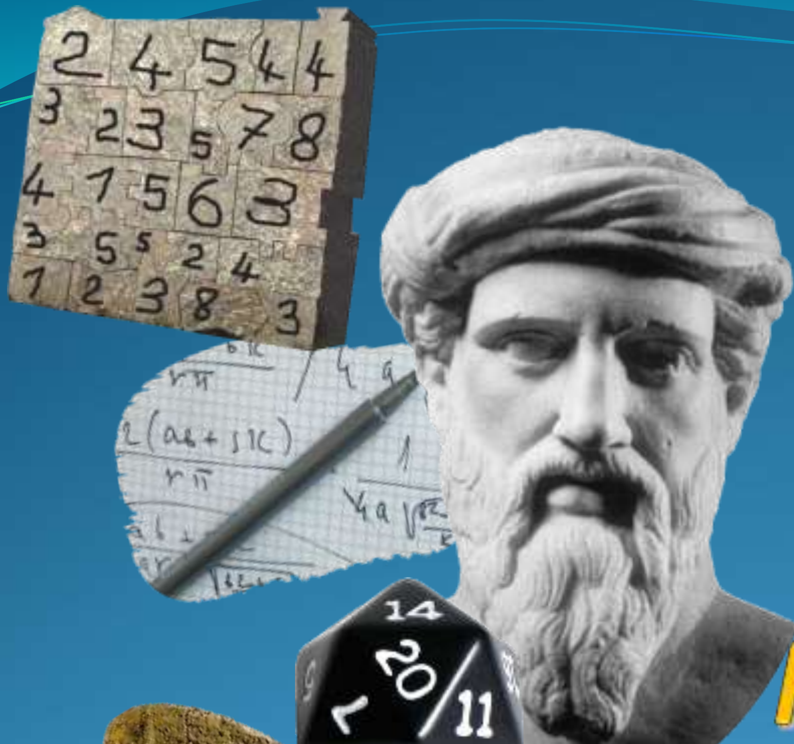
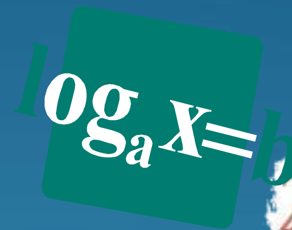
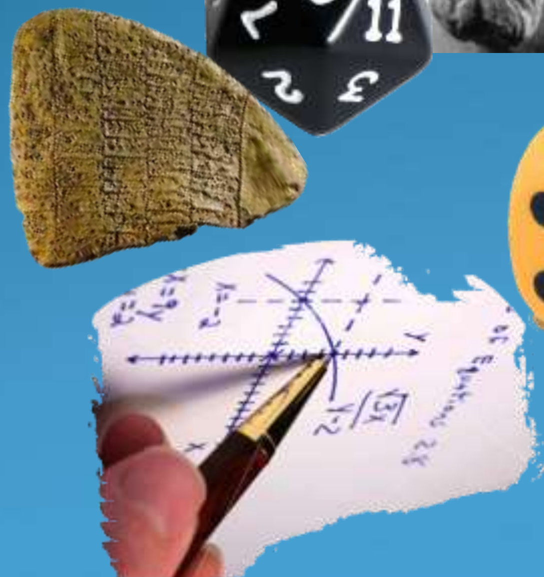
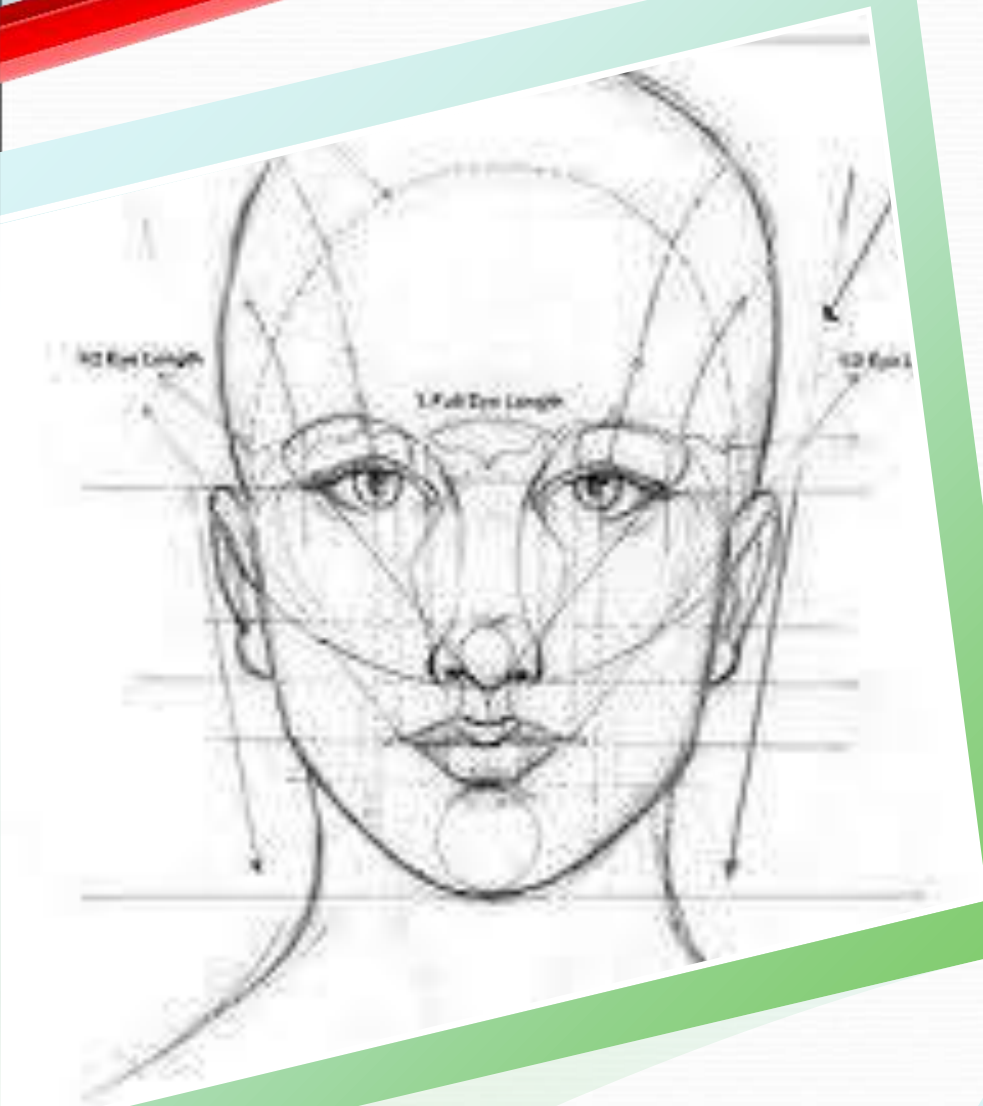




Proporciones y Proporcionalidad



Mauricio Cabezas



PROPORCIONES

- Proporción: Es la igualdad de dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{ó} \qquad a : b = c : d$$

y se lee: “ a es a b como c es a d ”

Además, a y d : extremos

c y b : medios

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

1.2 Teorema fundamental de las proporciones

El producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

$$a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Ejemplo 1:

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{20}$$

Es una proporción ya que $5 \cdot 20 = 4 \cdot 25 = 100$

Ejemplo 2:

La razón entre el número de dulces que tiene Agustín y el número de dulces que tiene su hermano es 2 : 3.
Si Agustín tiene 12 dulces, ¿cuántos dulces tiene su hermano?

Solución:

Si x es el número de dulces del hermano, entonces:

$$\frac{\text{Dulces de Agustín}}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{2}{3}$$

$$36 = 2x$$

$$18 = x$$

Por lo tanto, su hermano tiene 18 dulces.

1.3 Serie de razones

Es la igualdad de 2 o más razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots\ldots = k$$

k: valor de la razón o constante de proporcionalidad

$k \in \mathbb{IR}$

ó

$$a : c : e : \ldots = b : d : f : \ldots$$

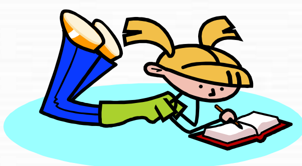
Ejemplo 1:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \ldots\ldots\ldots = 0{,}5$$ (Valor de la razón)

Ejemplo 2:

Si $\left.\begin{array}{l} a : b : c = 3 : 5 : 6 \\ a + b + c = 42 \end{array}\right|$, determinar a, b y c.

Solución: Si $a : b : c = 3 : 5 : 6$, entonces:



$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$$ (Constante de proporcionalidad)

Luego: $a = 3k$, $b = 5k$ y $c = 6k$

Como $a + b + c = 42$, entonces:

$$3k + 5k + 6k = 42$$
$$14k = 42$$
$$k = \frac{42}{14}$$
$$\boxed{k = 3}$$

Por lo tanto: $a = 9$, $b = 15$ y $c = 18$

1.4 Proporcionalidad directa

Dos variables son directamente proporcionales, si al aumentar (disminuir) una de ellas, la otra también aumenta (disminuye), en la misma proporción.

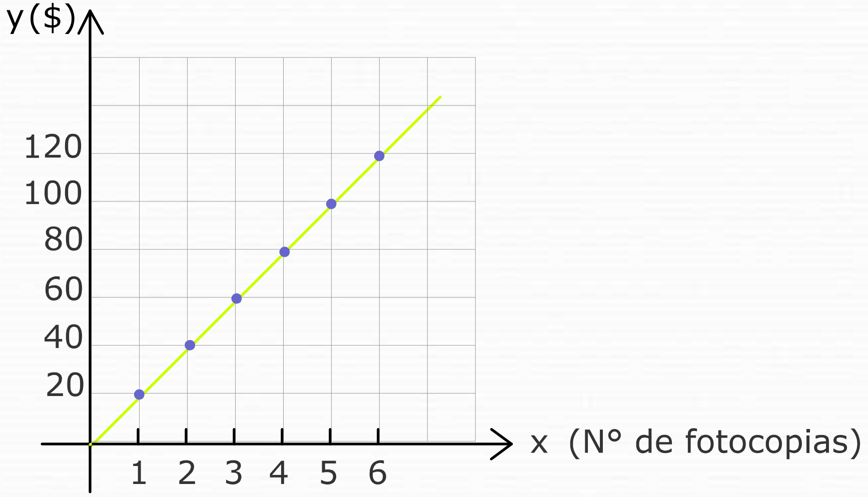
y es directamente proporcional a x si $\frac{y}{x} = k$, k: constante

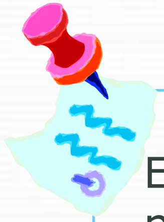
Ejemplo:

La siguiente tabla representa la relación entre el número de fotocopias y su costo en pesos:

N° de fotocopias (x)	**$ (y)**	**$K = \frac{y}{x}$**
1	20	20
2	40	20
3	60	20
4…	80…	20…

Gráficamente:





El gráfico de una proporción directa es una recta con pendiente positiva.

1.5 Proporcionalidad inversa

Dos variables son inversamente proporcionales, si al aumentar una de ellas, la otra disminuye (y viceversa) en la misma proporción.

y es inversamente proporcional a x si $y \cdot x = k$, k: constante

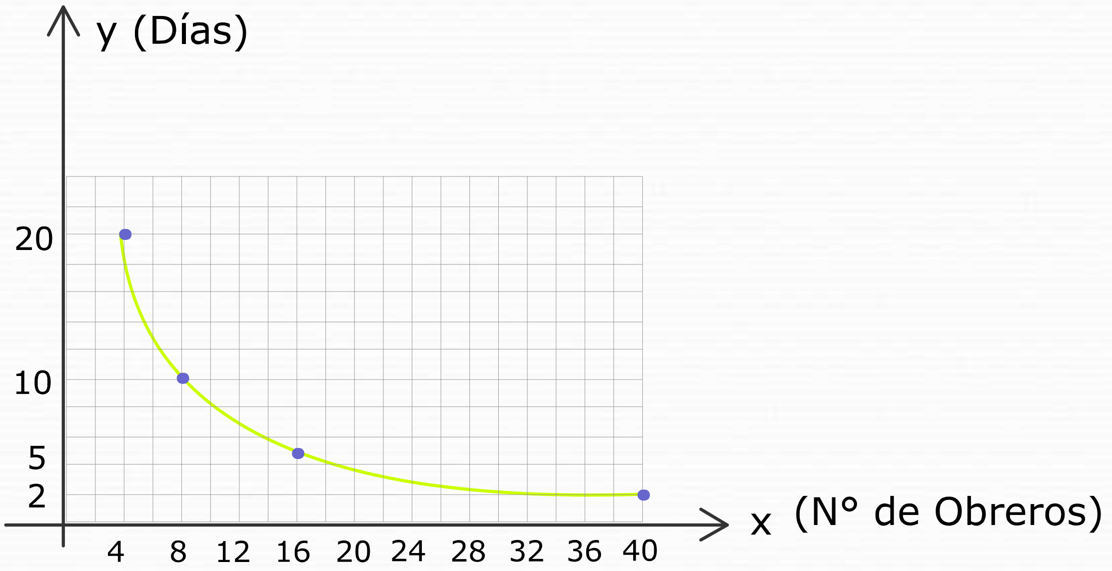
Ejemplo:

Para construir una piscina en 20 días se requiere de 4 obreros. Entonces se puede inferir que para demorar 10 días se requieren 8 obreros, y para demorar 5 días se requieren 16 obreros, y así sucesivamente.

Si tabulamos:

N° de obreros (x)	**Días (y)**	**k = y·x**
4	20	80
8	10	80
16	5	80
40…	2…	80…

Gráficamente:



El gráfico de una proporción inversa es una hipérbola.

1.6 Proporcionalidad compuesta

Es aquella en que intervienen más de dos variables inversamente proporcionales y/o directamente proporcionales.

Ejemplo:

Si 5 pasteleros producen en 7 días 400 tortas, ¿cuántas tortas pueden producir 14 pasteleros en 9 días?

Solución:

Un método práctico es el siguiente:

1° Se ordenan los datos definiendo las variables:
p: pasteleros *t*: tortas *d*:dias

2° Se hace el análisis entre las variables y se verifca que:

p dp *t* *p* ip *d*

3° Se hace la fórmula:

$$\boxed{\frac{p \cdot d}{t} = \frac{p \cdot d}{t}}$$

4° Se asigna un subíndice a cada variable y en cada lado, pues estas situaciones siempre comparan dos realidades, es por eso que colocaremos "1" y "2" esto es:

$$\frac{p_1 \cdot d_1}{t_1} = \frac{p_2 \cdot d_2}{t_2}$$

Esto queda así pues:

- N° de Pasteleros y N° de días son inversamente proporcionales, ya que, mientras más pasteleros menos es la cantidad de días trabajados.

- Días y N° de tortas son directamente proporcionales, ya que, mientras más días, mayor es la cantidad de pasteles producidos.

Reemplazando entonces: $\frac{5 \cdot 7}{400} = \frac{14 \cdot 9}{x}$

$35 \cdot x = 14 \cdot 9 \cdot 400$

Despejando x obtenemos:

$$x = \frac{\cancelto{2}{14} \cdot 9 \cdot \cancelto{80}{400}}{\cancel{35}} = 1.440$$

$\cancel{5}$ 1

Por lo tanto, 14 pasteleros en 9 días, pueden producir 1.440 tortas.

1.7 Proporción Directa y Función Lineal:

$$\frac{y}{x} = K$$